



TITLE:

# ある種の擬微分作用素とその準楕円性への応用 (偏微分方程式の解の構造の研究)

AUTHOR(S):

荒牧, 淳一

---

CITATION:

荒牧, 淳一. ある種の擬微分作用素とその準楕円性への応用 (偏微分方程式の解の構造の研究). 数理解析研究所講究録 1979, 357: 208-218

ISSUE DATE:

1979-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104476>

RIGHT:

## ある種の擬微分作用素とその準楕円性への応用

東京電機大 理工学部 荒牧 淳一

### 0. 序

本講演では、特性集合  $\Sigma$  が有限個の円錐部分で構成  
 $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  の和集合となる擬微分作用素  $P$  を考察する。ある  
種の横断性条件と包含性条件の下で  $P$  が準楕円型となるため  
の必要十分条件を与える。

$n=1$  のとき、我々の考えるクラスは Helffer [5] によって  
与えられたクラス  $L^{m, M}_k(X; \Sigma)$ , さらに  $k=2$  のときには  
Sjöstrand [8] によって与えられたクラス  $L^{m, M}_c(X; \Sigma)$  と一致す  
る。(Helffer [4] も参照)。  $n=1, M=k=2$  で  $\Sigma$  が包含的なときは  
Boutet de Monvel [1] は我々のクラスより一般な  $OPS^{-m, -M}$   
にパラメトリックスをもったための必要十分条件を得た。これは  
また  $P$  が損失 1 の準楕円型であるための必要十分条件  
でもある。一般の  $M, k$  については [5] は損失  $\frac{M}{k}$  の準楕円型  
であることを証明するために、 $P$  に対し左パラメトリックスを、

構成した。これは [1] の一般化である。

我々は [5] で開発された手法を使い  $\mathcal{D}$  に関するある種の  
不変量を定義し、それを用いて  $\mathcal{D}$  が準局所的であるための  
必要十分条件を述べる。証明については概略を述べておいて、とど  
める。

### 1. 定義と結果

$X$  を  $N$  次元パラコンパクト  $C^\infty$ -多様体,  $\mathcal{P}X \setminus \{0\}$  を  $X$  の  
余接バンドルからゼロ切断面を除いたものとする。

定義 1.1.  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  を  $\mathcal{P}X \setminus \{0\}$  における余次元  $P_1, P_2, \dots, P_n$  の閉鎖部分多様体,  $m$  を実数,  $M_1, M_2, \dots, M_n$  を非負整数,  $k_1, k_2, \dots, k_n$  を 2 以上の整数とする。このとき擬微分作用素  $\mathcal{D}$  の  
クラス  $\text{OPL}_{k_1, \dots, k_n}^{m, M_1, \dots, M_n}(X; \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n)$  に属するとは、各局所座標系  
 $U \subset X$  において  $\mathcal{D}$  の表象  $P(x, \xi)$  が次の (1.1) ~ (1.3) を満たす  
ときをいう：

$$(1.1) \quad P(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x, \xi), \quad \text{ここで } P_{m-j} \in C^\infty(\mathbb{R}^N_x \times (\mathbb{R}^N \setminus 0))$$

であり,  $m-j$  次の正值斉次性をもつ。

$$(1.2) \quad U \text{ に含まれる各コンパクト集合 } K \text{ に対し, 定数 } C_K > 0 \text{ が存在して } (x, \xi) \in K \times (\mathbb{R}^N \setminus 0), |\xi| \geq 1 \text{ のとき}$$

$$\frac{|P_{m-j}(x, \xi)|}{|\xi|^{m-j}} \leq C_K \prod_{l=1}^n d_l(x, \xi)^{(M_l - k_l j)_+}$$

(1.3)  $U$  に含まれる各コンパクト集合  $K$  に対し, 定数  $C_K > 0$  が存在して  $(x, \xi) \in K \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$ ,  $|\xi| \geq 1$  のとき

$$\frac{|P_m(x, \xi)|}{|\xi|^m} \geq C_K' \prod_{l=1}^n d_l(x, \xi)^{M_l}$$

ここで  $d_l(x, \xi) = \inf_{(y, \eta) \in \Sigma_l} \left\{ |y - x| + \left| \eta - \frac{\xi}{|\xi|} \right| \right\}$  であり,  $\lambda \in \mathbb{R}$  に

対して  $(\lambda)_+ = \sup(0, \lambda)$  である。

注意 1.2. もしある  $i$  に対し  $M_i = 0$  ならば

$\text{OPL}_{k_1, \dots, k_n}^{m, M_1, \dots, M_n}(X; \Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = \text{OPL}_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n}^{m, M_1, \dots, M_{i-1}, M_{i+1}, \dots, M_n}(X; \Sigma_1, \dots, \Sigma_{i-1}, \Sigma_{i+1}, \dots, \Sigma_n)$  となる。また  $P \in \text{OPL}_{k_1, \dots, k_n}^{m, M_1, \dots, M_n}(X; \Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$  のとき  $P$  の特性集合  $\Sigma$  は  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$  の和集合となる。

定義 1.3.  $q_1, q_2 \in L_{k_1, \dots, k_n}^{m, M_1, \dots, M_n}$  ((1.1)~(1.3) にあてはまる象のクラス) とするとき,  $\Gamma(X, 10)$  のある近傍  $U$  で  $q_1 \equiv q_2$  とは,  $q_1 - q_2 \in L_{k_1, \dots, k_n}^{m, M_1 + (k_1 - 1), \dots, M_n + (k_n - 1)}$  であるとする。

このとき次が成立する。

命題 1.4.  $P \in \text{OPL}_{k_1, \dots, k_n}^{m, M_1, \dots, M_n}(X; \Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$  とする。

(実際は (1.1) と (1.2) を満たす限りよい)。このとき, 各  $J \in \Sigma$  に対し  $I_J = \{i; J \in \Sigma_i\} = (i_1, \dots, i_d)$  とおくと, ある  $J$  の近傍  $U$  が存在して  $U$  で

$$q \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\frac{1}{2i} \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l}\right) P = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} \left(\frac{1}{2i} \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)^t P$$

と定義すると  $\mathfrak{f}$  は  $L_{k_{i_1}, \dots, k_{i_\Delta}}^{m, M_{i_1}, \dots, M_{i_\Delta}} / L_{k_{i_1}, \dots, k_{i_\Delta}}^{m, M_{i_1} + (k_{i_1} - 1), \dots, M_{i_\Delta} + (k_{i_\Delta} - 1)}$  で  
 考えたとき、局所斉次正準変換  $\tau: T^*X \setminus \{0\} \rightarrow T^*\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  の  $F$  は  
 不変である。このことは  $F$  を  $\tau$  に付随した楕円型フーリエ  
 積分作用素、 $P'$  を  $P' = F P F^{-1}$  の表象、 $\mathfrak{f}'$  を  $P'$  から上の公式  
 により作られる表象とすると  $\mathfrak{f}'(\tau(p')) = \mathfrak{f}(p')$  ( $p' \in U$ )  
 を意味する。

次に  $\mathfrak{f} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{f}_{m-j} \in L_{k_{i_1}, \dots, k_{i_\Delta}}^{m, M_{i_1}, \dots, M_{i_\Delta}} / L_{k_{i_1}, \dots, k_{i_\Delta}}^{m, M_{i_1} + (k_{i_1} - 1), \dots, M_{i_\Delta} + (k_{i_\Delta} - 1)}$  とし  
 $T_j(T^*X \setminus \{0\})^{\sum_{l=1}^{\Delta} (M_{i_l} - k_{i_l} \cdot j)}$  上の  $\sum_{l=1}^{\Delta} (M_{i_l} - k_{i_l} \cdot j)$ -線  
 型形式  $\tilde{\mathfrak{f}}_{m-j}$  を次で定義する:

$$\begin{aligned} X_{i_1}^1, X_{i_1}^2, \dots, X_{i_1}^{M_{i_1} - k_{i_1} \cdot j}, \dots, X_{i_\Delta}^1, \dots, X_{i_\Delta}^{M_{i_\Delta} - k_{i_\Delta} \cdot j} \in T_j(T^*X \setminus \{0\}) \text{ に対して} \\ \tilde{\mathfrak{f}}_{m-j}(p)(X_{i_1}^1, \dots, X_{i_\Delta}^{M_{i_\Delta} - k_{i_\Delta} \cdot j}) = \\ = \prod_{l=1}^{\Delta} \frac{1}{(M_{i_l} - k_{i_l} \cdot j)!} (\tilde{X}_{i_1}^1 \dots \tilde{X}_{i_\Delta}^{M_{i_\Delta} - k_{i_\Delta} \cdot j} \mathfrak{f}_{m-j})(p). \end{aligned}$$

ここで  $\tilde{X}$  は  $X$  の  $p$  の近傍への拡張である。

注意 1.5. (1) 上の  $\tilde{\mathfrak{f}}_{m-j}$  の定義は  $\mathfrak{f}$  のクラスのとり方に  
 独立、また  $\tilde{\mathfrak{f}}_{m-j}$  は対称である。

(2)  $n=1$ ,  $M_1 = k_1$  のときは  $\mathfrak{f}_m(x, \xi) = P_m(x, \xi)$ ,  $\mathfrak{f}_{m-1}(x, \xi) =$   
 $= P_{m-1}(x, \xi) - \frac{1}{2i} \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} P_m(x, \xi)$  である。

我々はさらに  $p \in \Sigma$  に対して次の定義をする。

$$\tilde{\mathfrak{f}}(p, \lambda) = \sum_{j=0}^{J_{I_p}} \tilde{\mathfrak{f}}_{m-j}(p)(x, \dots, \lambda), \quad \lambda \in T_j(T^*X \setminus \{0\})$$

ここで  $J_{I_p} = \max \{ M_{i_l} / k_{i_l} ; 1 \leq l \leq \Delta \}$  である。

$$\Gamma_j = \{ \tilde{q}_j(p, x) ; x \in T_p(T^*X \setminus \{0\}) \}.$$

注意 1.6.  $n=1$ ,  $M_1 = k_1$  のときは

$$\tilde{q}_j(p, x) = (\text{transversal hessian of } P_m) + (\text{subprincipal symbol})$$

となる。

次に我々は  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  に次のような横断性条件と包含性条件を仮定する:

(H.1) 各  $j \in \Sigma$  に対して  $I_j = (i_1, \dots, i_{P_j})$  とおくとき  $P_{i_1} + P_{i_2} + \dots + P_{i_{P_j}}$  個の  $C^\infty$ -実数値斉次関数  $u_{i_j}^k$ ,  $1 \leq k \leq P_{i_j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , が  $j$  の錐近傍に存在して、そこで

$$\Sigma_{i_j} = \{ u_{i_j}^1 = u_{i_j}^2 = \dots = u_{i_j}^{P_{i_j}} = 0 \}$$

と定める。また  $du_{i_j}^k$  は  $j$  で 1 次独立であるとする。

(H.2) 各  $i, j$  に対して  $\Sigma_i \cap \Sigma_j$  は包含的である。すなわち  $u_{i_1}^1, \dots, u_{i_1}^{P_{i_1}}, u_{j_1}^1, \dots, u_{j_1}^{P_{j_1}}$  を (H.1) の如き関数とすると  $\Sigma_i \cap \Sigma_j$  上

$$\{ u_{i_1}^k, u_{j_1}^l \} = 0 \text{ が成り立つ。}$$

(H.3)  $\sum_{k=1}^N \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ ,  $H_{u_{i_j}^k}$  ( $1 \leq k \leq P_{i_j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) は  $j$  で 1 次独立である。

ここでハミルトン-ポアンカレのベクトル場  $H_j$  とポアソンの括弧式はそれぞれ次の公式で定義される:

$$H_j = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right),$$

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right).$$

このとき我々は次の定理を得る:

定理 1.7.  $P \in \text{OPL}_{k_1, \dots, k_n}^{m, M_1, \dots, M_n}(X; \Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$  とする。

(H.1), (H.2), (H.3) を仮定する。このとき  $P$  が  $\rho \in \Sigma$  で損失  $M_{I_\rho}$  の準楕円型であるための必要十分条件は  $P_\rho$  が原点を含まないことである。ここで  $I_\rho = (i_1, \dots, i_n)$  とすると  $M_{I_\rho} = \frac{M_{i_1} + \dots + M_{i_n}}{k_{i_1} + \dots + k_{i_n}}$  でありまた  $P$  が  $\rho$  で損失  $M_{I_\rho}$  の準楕円型であるとは  $u \in \mathcal{D}'(X)$ ,  $\rho$  で  $Pu \in H^s$  のとき  $\rho$  で  $u \in H^{s+m-M_{I_\rho}}$  が成り立つことであるとする。

さらに我々は次を得る:

系 1.8. 上記定理における仮定が成り立つとする。各

$\rho \in \Sigma$  に対して  $P_\rho$  が原点を含まないとする。  $P$  は損失  $M$  の準楕円型である。ここで  $M = \max \{ M_{I_\rho} ; \rho \in \Sigma \}$  であり、 $P$  が損失  $M$  の準楕円型であるとは、  $u \in \mathcal{D}'(X)$ ,  $Pu \in H^s$  のとき  $u \in H^{s+m-M}$  が成り立つこととする。

注意 1.9. (1) 我々は定理の証明において  $P$  の左バウメトリックスをクラス  $\mathcal{L}_{\rho, \delta}^{M_{I_\rho}-m}$  に構成する。ここで  $\rho = 1 - \frac{1}{k}$ ,  $\delta = 0$ ,  $k = \min \{ k_j ; 1 \leq j \leq n \}$  である。(クラス  $\mathcal{L}_{\rho, \delta}^{M_{I_\rho}-m}$  については Hörmander [5] を参照されたい。)

(2)  $M_{I_\rho}$  が  $\rho \in \Sigma$  に対して定数ならば系の条件は必要でもある。

(3)  $n=1$  のときこの定理は Helffer [5] によって証明された。

## 2. 命題 1.4 の証明の概略.

$f \in \Sigma$ ,  $I_f = (i_1, \dots, i_s)$  とすると  $C^\infty$ -実数値多変関数  $u_{i_\ell}^k$  ( $1 \leq k \leq p_{i_\ell}$ ,  $1 \leq \ell \leq s$ ) を適当に選んで微局所的に

$$\Sigma_{i_\ell} = \{ u_{i_\ell}^1 = \dots = u_{i_\ell}^{p_{i_\ell}} = 0 \}$$

とできる。ここで  $u_{i_\ell}^k$  は位数  $\frac{1}{k_{i_1} + \dots + k_{i_s}}$  の多変性をもつと仮定してよい。次に  $U_{i_\ell}^k$  を主表象  $u_{i_\ell}^k$  である擬微分作用素とする。このとき  $P \in \text{OPL}^{m, M_{i_1}, \dots, M_{i_s}}_{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}}$  ならば Taylor の公式から  $P$  は次のように書ける:

$$P = \sum_{j=0}^{J_{I_f}} \sum_{\substack{(\alpha)_\ell \in [1, 2, \dots, p_{i_\ell}] \\ 1 \leq \ell \leq s}} \frac{1}{M_{i_1} - k_{i_1} \cdot j} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_s, j} (U)_{i_1}^{(\alpha)_1} \dots (U)_{i_s}^{(\alpha)_s}$$

ここで  $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_s, j}$  は位数  $m - \frac{M_{i_1} + \dots + M_{i_s}}{k_{i_1} + \dots + k_{i_s}}$  の擬微分作用素で記号については次のとおりである:

$$J_{I_f} = \max \left\{ \frac{M_{i_\ell}}{k_{i_\ell}} ; 1 \leq \ell \leq s \right\},$$

$$(\alpha)_\ell = (\alpha_\ell^1, \dots, \alpha_\ell^{M_{i_\ell} - k_{i_\ell} \cdot j}), \quad \alpha_\ell^k \in \{1, \dots, p_{i_\ell}\},$$

$$(U)_{i_\ell}^{(\alpha)_\ell} = U_{i_\ell}^{\alpha_\ell^1} \dots U_{i_\ell}^{\alpha_\ell^{M_{i_\ell} - k_{i_\ell} \cdot j}}.$$

次に我々は

$$q_{m-j} = \sigma_{m-j} \left( \sum_{\substack{(\alpha)_\ell \in [1, \dots, p_{i_\ell}] \\ 1 \leq \ell \leq s}} \frac{1}{M_{i_1} - k_{i_1} \cdot j} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_s, j} (U)_{i_1}^{(\alpha)_1} \dots (U)_{i_s}^{(\alpha)_s} \right)$$

,  $j = 0, 1, \dots, J_{I_f}$  とおく。

このとき次の補題を必要とする:



補題 2.1. 
$$Q = \sum_{\substack{(\alpha)_l \in [1, \dots, p_{i_l}]^{M_{i_l} - k_{i_l} j} \\ 1 \leq l \leq n}} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, j} (U)_{i_1}^{(\alpha)_1} \dots (U)_{i_n}^{(\alpha)_n}$$

を上で得られたものとする。このとき  $Q$  の表象  $q$  は次で与えられる:

$$q \equiv \exp \left( \frac{1}{2i} \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_l} \right) \cdot \sigma_{n-j}(Q) \pmod{L_{\substack{n, M_{i_1} + (k_{i_1}-1), \dots, M_{i_n} + (k_{i_n}-1) \\ k_{i_1}, \dots, k_{i_n}}}}$$

証明については [5] を参照。

この補題を使うと  $P$  の表象  $p$  は

$$p \equiv \exp \left( \frac{1}{2i} \sum_{l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_l} \right) \cdot q \pmod{L_{\substack{n, M_{i_1} + (k_{i_1}-1), \dots, M_{i_n} + (k_{i_n}-1) \\ k_{i_1}, \dots, k_{i_n}}}}$$

で与えられる。故に命題 1.4 は証明された。

### 3. 定理 1.7 の証明の概略

(1) 十分性

$P \in \text{OPL}_{k_1, \dots, k_n}^{n, M_1, \dots, M_n}(X; \Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$ ,  $P \in \Sigma$ ,  $I_j = (i_1, \dots, i_n)$  とする。

このとき仮定 (H.1), (H.2), (H.3) の下で、ハミルトン-ヤコビの理論を使うと、局所的斉次正準変換  $\tau; T^*X \setminus \{0\} \rightarrow T^*\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

で  $\Sigma_{i_l}$  が  $\Sigma'_{i_l} = \{(\alpha, \xi) \in T^*\mathbb{R}^N \setminus \{0\}; \xi_{p_1 + \dots + p_{i_{l-1}} + 1} = \dots = \xi_{p_1 + \dots + p_{i_l}} = 0\}$ ,  $l=1, 2, \dots, n$  に移るものがある。また定理の条件、結論

ともに正準変換の下では不変であるから、我々は  $X = \mathbb{R}^N$ ,

$\Sigma_{i_l} = \{(\alpha, \xi) \in T^*\mathbb{R}^N \setminus \{0\}; \xi_{p_1 + \dots + p_{i_{l-1}} + 1} = \dots = \xi_{p_1 + \dots + p_{i_l}} = 0\}$  の

場合に帰着されたことになる。簡単のために記号  $(U)_{i_l}$  と

同様に  $(\xi)_{i_l} = (\xi_{p_1 + \dots + p_{i_{l-1}} + 1}, \dots, \xi_{p_1 + \dots + p_{i_l}})$  と書く

ことにする。このとき  $P$  は次の形に書ける：

$$(3.1) \quad P = \sum_{j=0}^{J_{I_j}} \sum_{\substack{(\alpha)_l \in [1, \dots, p_{i_l}] \\ 1 \leq l \leq \Lambda}} \frac{1}{M_{i_l} - k_{i_l} j} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_\Lambda, j} (D_x)_{i_1}^{(\omega)_1} \dots (D_x)_{i_\Lambda}^{(\omega)_\Lambda},$$

ここで  $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_\Lambda, j}$  は位数  $m - \sum_{l=1}^{\Lambda} M_{i_l} + j(\sum_{l=1}^{\Lambda} k_{i_l} - 1)$  の擬微分作用素である。このとき 命題 1.4 によれば我々の仮定は次のようになる：

$$\mathcal{F} \text{ の適当な錐近傍で } P' = \sum_{j=0}^{J_{I_j}} P_{m-j} \neq 0.$$

以下この条件の下で Boutet de Monvel [1] の議論をすこし修正したものを使えば結論が得られる。

## (2) 必要性.

ある  $\mathcal{F} = (x^0, \xi^0) \in \Sigma$  で  $P_{\mathcal{F}}$  が原点を含んだとすると、 $\mathcal{F}$  の錐近傍で  $P$  を (3.1) の形に書いておいて次を証明すれば十分である。すなわち  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  で  $WF(u) \subset \{(x^0, \lambda \xi^0); \lambda > 0\}$ ,  $Pu \in H^s(\mathcal{F})$  であるが  $u \notin H^{s+m-M_{I_j}}$  となるものの存在を示せばよい。簡単のため次の記号を使う：

$$M = \sum_{l=1}^{\Lambda} M_{i_l}, \quad K = \sum_{l=1}^{\Lambda} k_{i_l},$$

$$x = ((x)_{i_1}, \dots, (x)_{i_\Lambda}, \tau), \quad \xi = ((\xi)_{i_1}, \dots, (\xi)_{i_\Lambda}, \tau).$$

我々は  $x^0 = 0$ ,  $\xi^0 = ((0)_{i_1}, \dots, (0)_{i_\Lambda}, 0, \dots, 0, \tau_N = 1)$  と仮定しよう。このとき仮定からある  $((\xi)_{i_1}, \dots, (\xi)_{i_\Lambda})$  が存在して

$$(3.2) \quad \sum_{j=0}^{J_{I_j}} \sum_{(\alpha)_j} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_{j+1}} (0, \dots, 0, \tau_N) (\xi)_{i_1}^{(\alpha)_1} \dots (\xi)_{i_{j+1}}^{(\alpha)_{j+1}} = 0.$$

ここで  $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_{j+1}}$  は  $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_{j+1}}$  の位数  $m - M + j(k-1)$  の斉次項である。ここで  $(\xi)_{i_1}, \dots, (\xi)_{i_{j+1}}$  に重さ 1,  $\tau$  に重さ  $k/(k-1)$  を指定すると (3.2) の左辺は Lascar [9] の意味での  $(1, k/(k-1))$  型  $(km-M)/(k-1)$  次斉次表象となる。故に次の命題から結論を得る:

命題 3.1.  $\mathcal{P}$  が (3.1) の形であり (3.2) をみたすとする。

このとき  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  で  $WF(u) \subset \{(x^0, \lambda \xi^0); \lambda > 0\}$ ,  $\mathcal{P}u \in H^s$  であるが  $u \notin H^{s+m-M_{\mathcal{P}}}$  なるものが存在する。

証明については [9] を参照。

例 3.2. (1)  $\mathbb{R}^N$  で  $\mathcal{P}(x, D) = D_1^{M_1} D_2^{M_2} \dots D_n^{M_n} + \lambda(x, D)$ , ( $n \leq N$ )

ここで  $\lambda(x, D)$  は位数  $\sum_{i=1}^n M_i - 1$  の擬微分作用素 ( $M_i \geq 2$ ) である。

このとき  $M_i = k_i$  とすると  $\mathcal{P}$  は損失 1 の準楕円型であるための必要十分条件はすべての  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  に対して  $\xi_1^{M_1} \xi_2^{M_2} \dots \xi_n^{M_n} + \lambda^0(x, \xi) \neq 0$  となることである。ここで  $\lambda^0(x, \xi)$  は  $\lambda(x, D)$  の主表象とする。

(2)  $\mathbb{R}^3$  で  $\mathcal{P}(x, D) = D_1^6 (D_2^2 + D_3^2) + i D_1^3 (D_1^4 + D_2^4 + D_3^4) + D_1^6 + D_2^6 + D_3^6$  とする。このとき  $M_1 = 6, k_1 = 3, M_2 = k_2 = 2$  とすると  $\mathcal{P}$  は損失 2 の準楕円型である。

## 参 考 文 献

- [1] Boutet de Monvel, L.: Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, Comm. Pure and Appl. Math., 27 (1974), 585-639.
- [2] Duistermaat, J. J. and Hörmander, L.: Fourier integral operators II, Acta Math., 128 (1972), 183-269.
- [3] Grigis, M. A. and Lascar, R.: Équations locales d'un système de sous-variétés involutives, C. R. Acad. Sc. Paris, 283 (1976) 503-506.
- [4] Helffer, B.: Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples, J. Math. pures et appl., 55 (1975), 207-215.
- [5] \_\_\_\_\_ : Invariant associés à une classe d'opérateurs pseudo-différentiels et applications à L'hypoellipticité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26 (1976), 55-70.
- [6] Hörmander, L.: Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math. 10 (1966), Singular integrals 138-183.
- [7] \_\_\_\_\_ : Fourier integral operators I, Acta Math., 127 (1971), 79-183.
- [8] Sjöstrand, J.: Parametrix for pseudo-differential operators with multiple characteristics, Arkiv för Mat. 12 (1974), 85-130.
- [9] Lascar, R.: Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi homogènes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 27 (1977), 79-123.